Resolución de Problemas y Algoritmos

Clase 17:
Resolución de problemas utilizando recursión

Dr. Diego R. García

Departamento de Ciencias e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca - Argentina

Motivación

- **Dibujen tres escaleras diferentes.**
- **¿cuántos escalones tienen?**
- **Imaginen un robot diseñado para subir una de esas escaleras.**

Motivación

Considere un escenario donde debemos programar un robot para subir una escalera, y se dispone de estas primitivas:

- **hay-un-solo-escalón: retorna TRUE o FALSE**
- **hay-más-de-un-escalón: retorna TRUE o FALSE**
- **subir-escalón: hace al robot subir un escalón.**

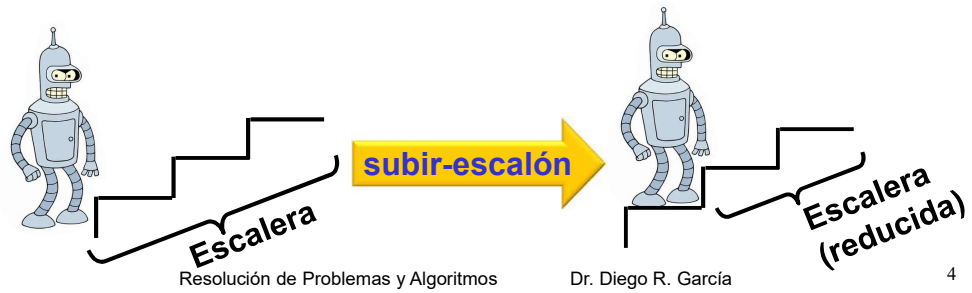
Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 3

Soluciones recursivas

Considere un escenario donde debemos programar un robot para subir una escalera, y se dispone de estas primitivas:

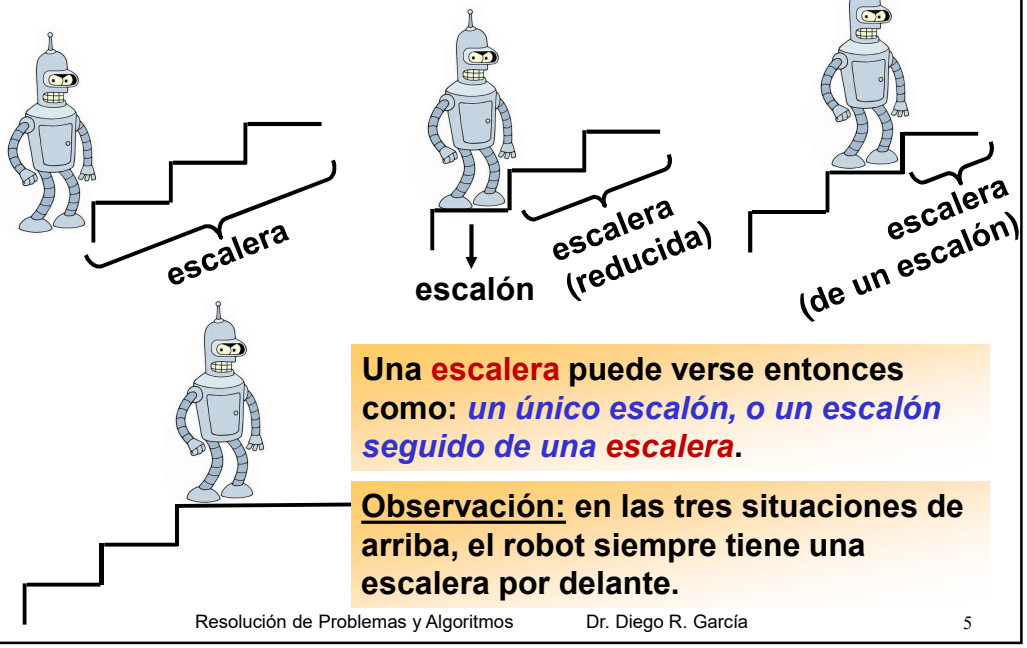
- **hay-un-solo-escalón: retorna TRUE o FALSE**
- **hay-más-de-un-escalón: retorna TRUE o FALSE**
- **subir-escalón: hace al robot subir un escalón.**

Observe el dibujo de la izquierda, donde el robot tiene por delante una escalera, si ejecuto subir-escalón el robot tendrá por delante una escalera (reducida en un escalón):



Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 4

Soluciones recursivas

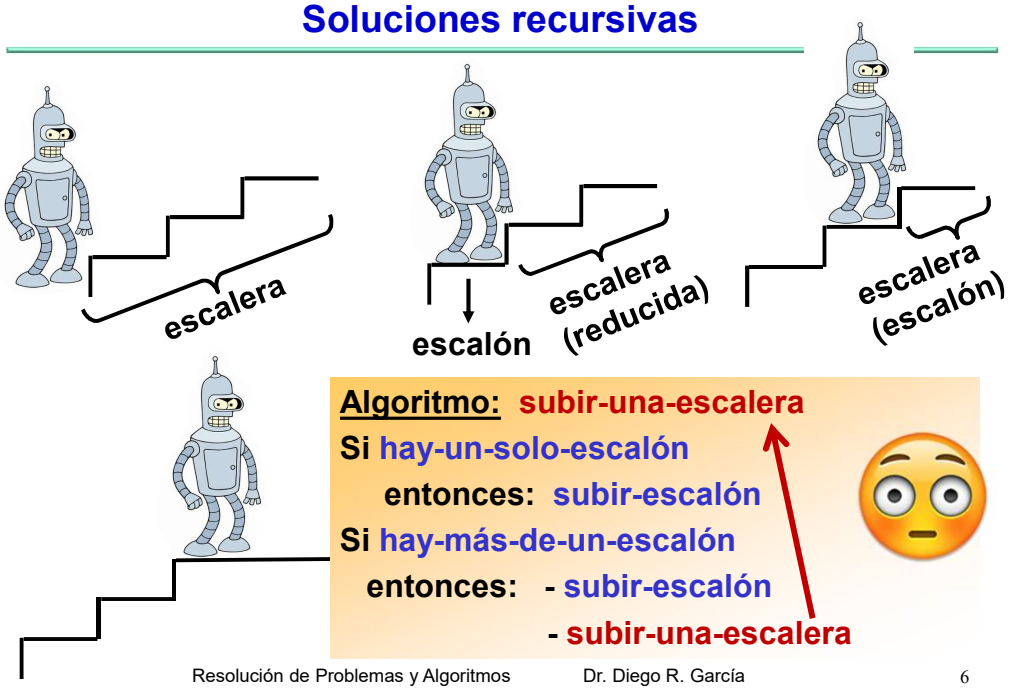


Una escalera puede verse entonces como: *un único escalón, o un escalón seguido de una escalera*.

Observación: en las tres situaciones de arriba, el robot siempre tiene una escalera por delante.

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 5

Soluciones recursivas



Algoritmo: subir-una-escalera
Si hay-un-solo-escalón
entonces: subir-escalón
Si hay-más-de-un-escalón
entonces: - subir-escalón
- subir-una-escalera

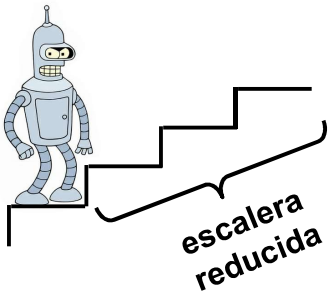
Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 6

Conceptos: algoritmos recursivos

- **Recursión es la forma en la cual se especifica un proceso basado en su propia definición.**
- **Un algoritmo es recursivo si se define en términos de sí mismo.**
- **Un algoritmo no debe entrar en una ejecución infinita, por lo tanto….**
- **Un algoritmo recursivo será válido, si:**
  - **(a) existe un caso base que no se define en términos de si mismo, y**
  - **(b) existe un caso general donde la referencia a sí mismo es sobre una instancia más sencilla (o reducida) que el caso considerado.**

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 7

Algoritmos recursivos



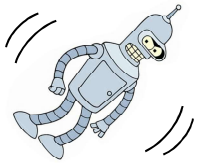
Algoritmo: subir-una-escalera
Si hay-un-solo-escalón
entonces: subir-escalón
Si hay-más-de-un-escalón
entonces: - subir-escalón
- subir-una-escalera

OK

- **Un algoritmo recursivo será válido, si:**
  - **(a) existe un caso base que no se define en términos de si mismo, y**
  - **(b) existe un caso general donde la referencia a sí mismo es sobre una instancia más sencilla (o reducida) que el caso considerado.**

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 8

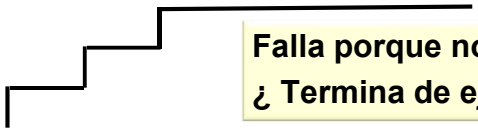
Algoritmos recursivos



Propuesta 2 subir-escalera
- -subir-escalón
- -subir-escalera

MAL

¿Por qué es incorrecto?



Falla porque no hay indicado un caso base (a).
¿ Termina de ejecutarse ?

- Un algoritmo recursivo será válido, si:
  - (a) existe un caso base que no se define en términos de si mismo, y
  - (b) existe un caso general donde la referencia a sí mismo es sobre una instancia más sencilla (o reducida) que el caso considerado.

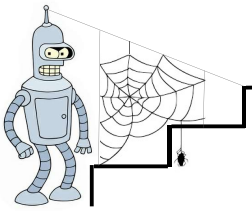
Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 9

Algoritmos recursivos

¿Por qué es incorrecto?

Propuesta 3 subir-la-escalera
Si hay-más-de-un-escalón
entonces:
- subir-la-escalera
- subir-escalón

MAL



Falla (b): la referencia a sí mismo NO es relativamente más sencilla o reducida (es igual).
¿Termina de ejecutarse? ¿sube un escalón?

- Un algoritmo recursivo será válido, si:
  - (a) existe un caso base que no se define en términos de si mismo, y
  - (b) existe un caso general donde la referencia a sí mismo es sobre una instancia más sencilla (o reducida) que el caso considerado.

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 10

Concepto: planteo recursivo

La forma de resolver un problema puede plantearse de manera recursiva si se indica:

(a) un caso base que no se define en términos de si mismo, y

(b) un caso general donde se hace referencia a sí mismo, pero con una instancia reducida del problema.

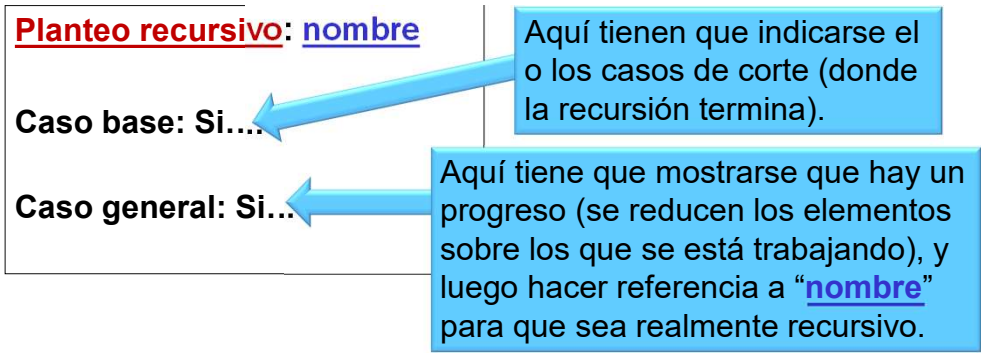
- **De esta forma, al utilizar este tipo de planteo, el problema queda divido en dos sub-problemas:**
  (1) caso base (también llamado caso trivial) y
  (2) caso general (también llamado caso recursivo).

- **Para indicar como resolver un problema de manera recursiva en RPA usaremos un planteo recursivo.**

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 11

Concepto: planteo recursivo

Un planteo recursivo es una solución a un problema donde:
(a) se indica un caso base que no se define en términos de si mismo, y además,
(b) se indica un caso general donde se hace referencia a sí mismo, pero con una instancia reducida del problema.



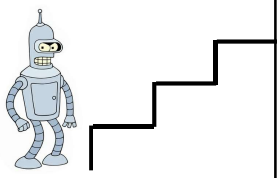
Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 12

Concepto: planteo recursivo

Un planteo recursivo es una solución a un problema donde:
(a) se indica un caso base que no se define en términos de si mismo, y además,
(b) se indica un caso general donde se hace referencia a sí mismo, pero con una instancia reducida del problema.

Observación: Una escalera puede verse como "un único escalón, o un escalón seguido de una escalera"

Planteo recursivo: subir una escalera



Caso base:
si hay un solo escalón, subo el escalón.

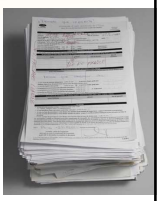
Caso general: si hay más de un escalón,
primero subo un escalón,
y luego subir una escalera que tiene un escalón menos.

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 13

Concepto: planteo recursivo

Un planteo recursivo es una solución a un problema donde:
(a) se indica un caso base que no se define en términos de si mismo, y además,
(b) se indica un caso general donde se hace referencia a sí mismo, pero con una instancia reducida del problema.

Problema propuesto: escribir un planteo recursivo para controlar un conjunto de 1 o más solicitudes de beca para asistir a un evento. (dibuje…)



Planteo recursivo: Controlar un conjunto de solicitudes

Caso base:
si hay una sola solicitud, controlar dicha solicitud

Caso general: si hay más de una solicitud
Controlar una solicitud y luego controlar un conjunto de solicitudes sin considerar la ya controlada.

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 14

Concepto: planteo recursivo

Un planteo recursivo es una solución a un problema donde:
(a) se indica un caso base que no se define en términos de si mismo, y además,
(b) se indica un caso general donde se hace referencia a sí mismo, pero con una instancia reducida del problema.

Problema propuesto: escribir un planteo recursivo para imprimir todos los documentos de una cola de impresión que puede tener 1 o más documentos. (dibuje)

- **Generalmente los trabajos de impresión (jobs) son enviados a una cola de impresión (queue) antes de ser impresos. Se puede escribir una solución recursiva para el siguiente problema.**

Concepto: planteo recursivo

Un planteo recursivo es una solución a un problema donde:
(a) se indica un caso base que no se define en términos de si mismo, y además,
(b) se indica un caso general donde se hace referencia a sí mismo, pero con una instancia reducida del problema.

Problema propuesto: escribir un planteo recursivo para imprimir todos los documentos de una cola de impresión que puede tener 1 o más documentos. (dibuje)

Planteo recursivo: Imprimir trabajos de la cola de impresión Q

Caso base:
si hay un único trabajo en Q, enviar a la impresora

Caso general: si hay más de un trabajo en Q,
sacar el primero de Q y enviar ia la impresora,
y luego imprimir trabajos de la cola de impresión Q.

Concepto: planteo recursivo

Un planteo recursivo es una solución a un problema donde:
(a) se indica un caso base que no se define en términos de si mismo, y además,
(b) se indica un caso general donde se hace referencia a sí mismo, pero con una instancia reducida del problema.

(¡para el 29!) Escribir un planteo recursivo para comer un plato de ñoquis (que no está vacio). ¡Dibuje!

Planteo recursivo: Comer un plato de ñoquis

Caso base:
si hay un solo ñoqui en el plato,
comer un ñoqui.

Caso general: si hay más de un ñoqui en el plato,
comer un ñoqui y luego comer un plato de ñoquis.

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 17

Concepto: planteo recursivo

Un planteo recursivo es una solución a un problema donde:
(a) se indica un caso base que no se define en términos de si mismo, y además,
(b) se indica un caso general donde se hace referencia a sí mismo, pero con una instancia reducida del problema.

(para acompañar los ñoquis) escribir un planteo recursivo para tomar de a sorbos una bebida que está en un vaso.

Planteo recursivo: tomar un vaso de bebida

Caso base:

Caso general:

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 18

Soluciones recursivas en Pascal

- Los **procedimientos y funciones** de Pascal nos permitirán **implementar soluciones recursivas**.
- A continuación, vamos a mostrar ejemplos de funciones y procedimientos recursivos.
- Vamos **a usar ejemplos un poco más simples** que los problemas asociados a programar el comportamiento de robots.
- Como verá en otras materias y en su vida profesional, "recursión" es una herramienta mucho más general y poderosa que la "iteración".
- Verá, por ejemplo, que hay lenguajes de programación que solo tienen recursión.

Tarea: indicar quien puede llamar a quien

```
Program Ejemplo; {para ejercitar el concepto de entorno}

PROCEDURE Dos (……);
  FUNCTION Tres (…..):….;
  begin ¿A qué func/proc puedo llamar desde acá? end;
begin ¿A qué func/proc puedo llamar desde acá? end;

PROCEDURE Uno (….);
begin
IF … then ¿A qué func/proc puedo llamar desde acá?
end;

begin
…
end.
```

Recuerde que el identificador del procedimiento o función es parte del entorno donde se está definiendo.

Metodología propuesta

1. Identificar ejemplos significativos que ayuden a entender el problema y su solución.
2. Realizar un planteo recursivo en el cual se distinga el "caso base", y el "caso general" (donde se define en términos de si mismo pero para una instancia más simple/reducida/menor del problema).
3. Verificar que el planteo sea correcto (con alguno de los ejemplos significativos).
4. Determinar si se realizará una función o un procedimiento recursivo, e implementarlo en Pascal.
5. Realizar la traza de la primitiva en Pascal.

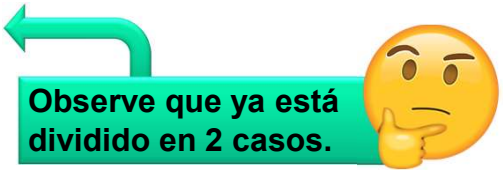
Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 21

Problema propuesto: 2^N

Escribir una función recursiva en Pascal para computar la función 2^N (N no negativo) utilizando multiplicación (*).

Para N no negativo, la función 2^N puede definirse recursivamente de la siguiente manera:

$$2^N \begin{cases} 2^0 = 1 \quad \text{(si N=0)} \\ 2^N = 2 * 2^{N-1} \quad \text{(si N>0)} \end{cases}$$



Planteo recursivo para 2^N

- Caso base: si N=0 entonces 2^N es: 1
- Caso general: Si N>0 entonces 2^N es: $2 * 2^{N-1}$

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 22

Problema propuesto: 2^N

```
function  dosAlaN (N:integer):integer;
{Otra versión de una función recursiva para
2 a la N (que no usa variables auxiliares)}
begin
  if (N = 0)   then dosAlaN :=1 {caso base}
  else dosAlaN := 2 * dosAlaN(N-1); {c. general}
end;
```

Esta es una forma de implementar en Pascal la función recursiva que respeta el planteo recursivo (no es la única).

Planteo recursivo para 2^N

- **Caso base: si N=0 entonces 2^N es 1**
- **Caso general: Si N>0 entonces 2^N es 2 * 2^{N-1}**

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 23

```
program Prueba2; {Prueba otra versión de 2 a la N}
var  exp, resu: integer;

function  dosAlaN (N:integer):integer;
{Otra versión de una función recursiva para
2 a la N (que no usa variables auxiliares)}
begin
   if (N = 0) then dosAlaN :=1 {caso base}
   else dosAlaN := 2 * dosAlaN(N-1); {general}
end;

{El programa valida la entrada y llama a la función recursiva}
begin
writeln(' Ingrese un exponente >= 0');
repeat readln(exp) until exp>=0;
resu:=dosAlaN(exp); writeln(' 2 a la ',exp,' es ' , resu );
end.
```

Realice trazas para exp=0 y exp=3.

¿Cuántas veces se llama a la función dosAlaN con respecto al valor de exp?

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 24

Problema propuesto: 2^N

```
function  dosAlaN (N:integer):integer;
var aux,nuevoN:integer;
  begin {función recursiva para 2 a la N}
   if (N = 0) then dosAlaN :=1 {caso base}
   else begin  {caso general}
        nuevoN:=N-1;
        aux:= dosAlaN(nuevoN);
        dosAlaN:=2 * aux;
       end;
end;
```

Esta es una forma de implementar en Pascal la función recursiva que respeta el planteo recursivo (no es la única).

Planteo recursivo para 2^N

- **Caso base: si N=0 entonces 2^N es 1**
- **Caso general: Si N>0 entonces 2^N es 2 * 2^{N-1}**

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 25

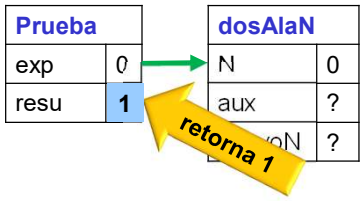
```
program Prueba; {Programa de prueba para 2 a la N}
var  exp, resu: integer;
     function  dosAlaN (N:integer):integer;
     var aux,nuevoN:integer;
       begin {función recursiva para 2 a la N}
        if (N = 0) then dosAlaN :=1 {caso base}
        else begin  {caso general}
             nuevoN:=N-1;
             aux:= dosAlaN(nuevoN);
             dosAlaN:=2 * aux;
            end;
     end;
{El programa valida la entrada y llama a la función recursiva}
begin
writeln(' Ingrese un exponente >= 0');
repeat readln(exp) until exp>=0;
resu:=dosAlaN(exp); writeln(' 2 a la ',exp,' es ' , resu );
end.
```

Realice trazas para exp=0 y exp=3.

¿Cuántas veces se llama a la función dosAlaN con respecto al valor de exp?

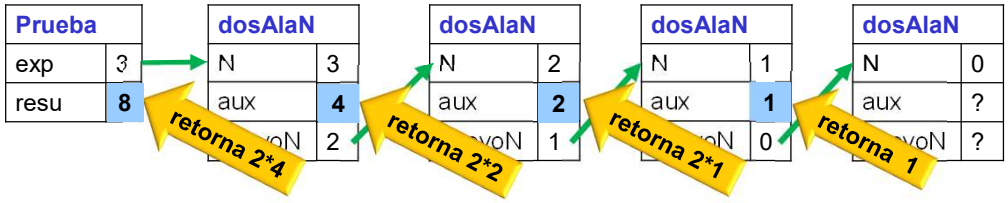
Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 26

Traza ingresando 0



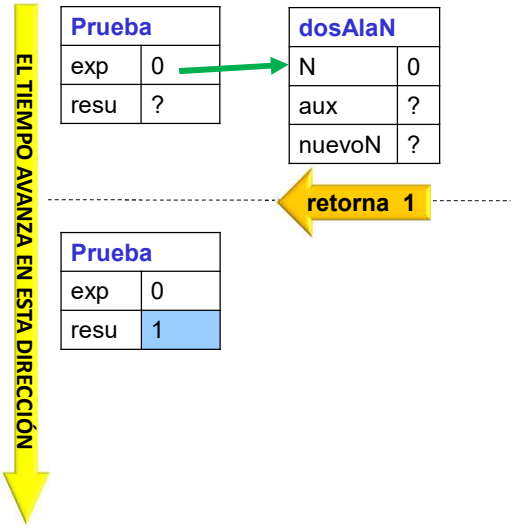
Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 27

Traza ingresando 3



Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 28

Traza ingresando 0

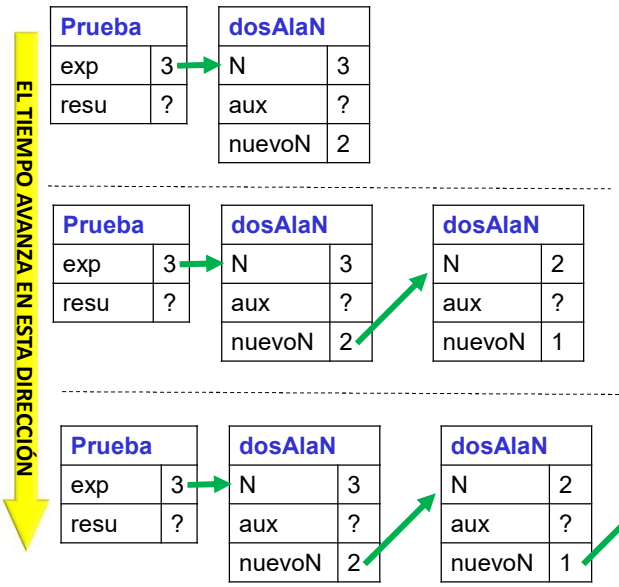


En ejecución, cada vez que se llama a un bloque (programa, función o procedimiento), se crean en memoria las variables locales y parámetros para esa llamada.

Al terminar la ejecución de una llamada, se eliminan de memoria esas variables locales y sus valores desaparecen

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 29

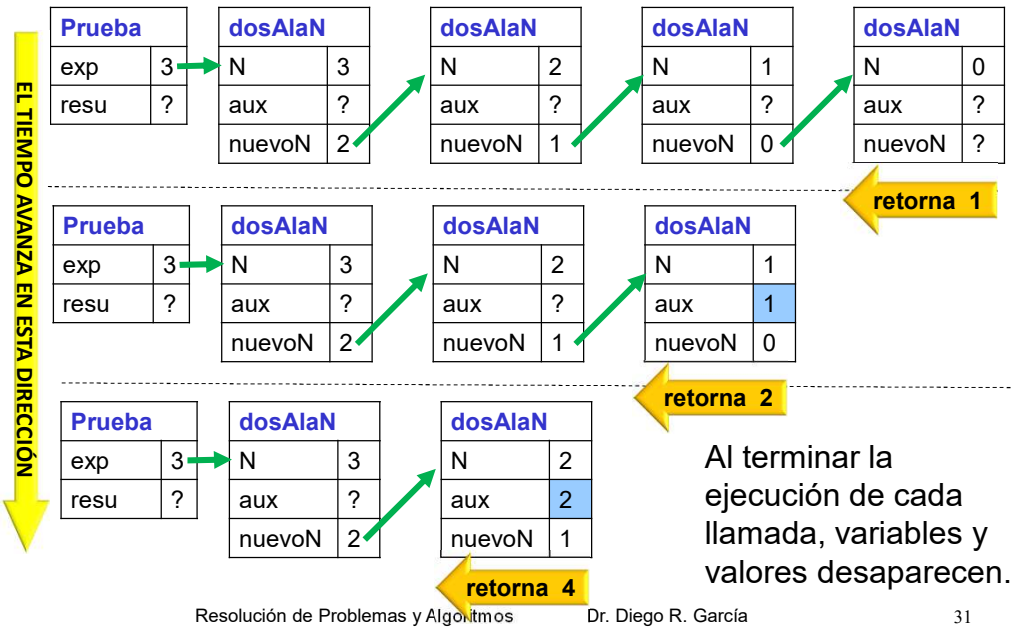
Traza ingresando 3 (primera parte)



En ejecución, cada vez que se llama a la función **dosAlaN**, se crean en memoria las variables locales y parámetros para esa llamada (no importa si la llamada es desde el programa o desde la misma función).

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 30

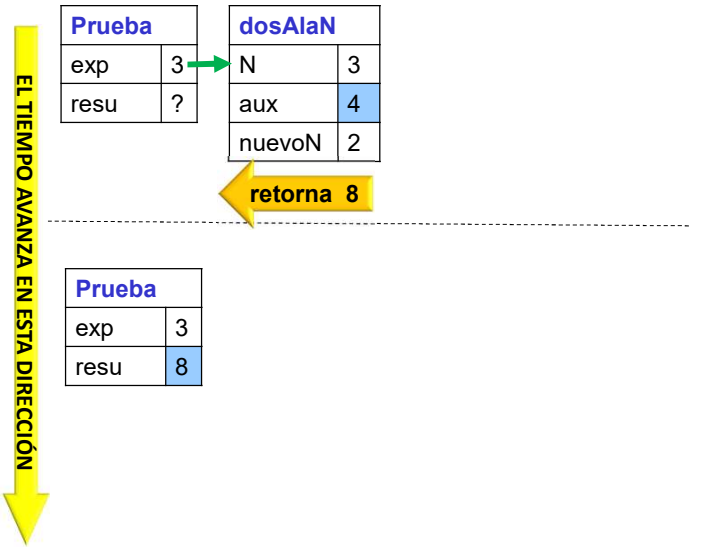
Traza ingresando 3 (segunda parte)



Al terminar la ejecución de cada llamada, variables y valores desaparecen.

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 31

Traza ingresando 3 (última parte)



Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 32

Continuará …